Von den

# sphärischen Linien

welche

durch den Schnitt einer Kugel und der Umdrehungs-Oberflächen des zweiten Grades

entstehen.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Von

***Dr. N. Ginsberg.***

Mit einer Steindrucktafel.

**Breslau, 1841.**

Verlag von August Schulz & Comp.

§. 1.

Die sphärischen Linien sind mit Ausnahme des Kreises Curven doppelter Krümmung, weil von allen ebenen Curven nur der Kreis Durchschnitt der Kugel und einer Ebene sein kann. Die doppelt gekrümmten Linien überhaupt werden durch ihre Projectionen auf drei koordinirte Ebenen dargestellt, und näher bestimmt, durch Tangenten, Normalebenen, Krümmungsebenen, Contingenz- und Flexionswinkel. Aber bei sphärischen Curven lässt sich ausser den erwähnten Bestimmungen die Gleichung der Curve auf der Kugel durch sphärische Coordinaten verzeichnen. Dieses Verfahren, welches Herr Professor Gudermann in seinem Grundriss der analytischen Sphärik gelehrt hat, habe ich auf diejenigen sphärischen Curven des vierten Grades anzuwenden gesucht, welche Durchschnitte der Kugel und der Umdrehungs-Oberflächen des zweiten Grades sind.

§. 2.

Die Flächen der zweiten Ordnung haben einen Mittelpunkt oder keinen. Zu jenen gehören das Ellipsoid, das einfächerige und zweifächrige Hyperboloid, der Kegel, der elliptische und hyperbolische Cylinder; zu diesen das elliptische und hyperbolische Paraboloid und der parabolische Cylinder. Die Flächen mit Mittelpunkt kön-

nen mit Ausnahme des hyperbolischen Cylinders alle durch Umdrehung erzeugt werden; von denen ohne Mittelpunkt hingegen kann nur das elliptische Paraboloid Rotationsfläche sein.

§. 3.

Wenn man den Anfang der rechtwinkligen Coordinaten in den Mittelpunkt der Kugel verlegt, und die Rotationsaxe parallel mit der vertikalen Axe der z in der Ebene xz annimmt, so ist die Gleichung der Kugel vom Halbmesser R.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = R$. Die Gleichung der Rotationsfläche zweiter Ordnung mit Mittelpunkt ist;

2. $M(z-C)^2+N y^2+N(x-A)^2+P=0$ und die ohne Mittelpunkt:

3. $My^2+M(x-A)^2+Q(z-C)=0$, wo AC in (2) die Coordinaten des Mittelpunkts und in (3) die des Scheitels des elliptischen Paraboloids sind, und $\frac{M}{P}$, $\frac{N}{P}$ und $\frac{Q}{M}$ Axen und Parameter bezeichnen.

## I. Durchschnitt der Kugel mit den Rotationsflächen zweiter Ordnung, welche einen Mittelpunkt besitzen.

§. 4.

Aufg. Die Gleichung des Kegels finden, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel, dessen Leitkurve durch die Gleichungen (1) und (2) gegeben ist.

Aufl. Verbindet man die Gleichungen der erzeugenden Graden

4. $\begin{cases} x=mz \\ y=nz \end{cases}$ mit denen der Leitkurve (1) und (2) so findet man: $(\mathfrak{A}m^2+n^2)+\mathfrak{B})^2=(m^2+n^2+1)(\mathfrak{C}m^2+\mathfrak{C}m+\mathfrak{D})$

wo $\mathfrak{A}=R^2N+A^2N+C^2M+P$

$\mathfrak{B}=R^2M+A^2N+C^2M+P$

$\mathfrak{C}=8ACR^2MN$

$\mathfrak{D}=4R^2C^2M^2$

$\mathfrak{E}=4R^2A^2N^2$ gesetzt worden ist. Berücksichtigt man, dass $\frac{x}{z}=m$ und $\frac{y}{z}=n$, so wird die Gleichung des

5. Kegels : $(\mathfrak{A}\left\{\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}\right\}+\mathfrak{B})^2=\left\{\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}+1\right\}(\mathfrak{E}\frac{x^2}{z^2}+$

$$\mathfrak{C}\frac{x}{z}+\mathfrak{D})$$

§. 5.

(fig. 1.) Die Gleichung des eben gefundenen Kegels giebt mit der der Kugel (1) die Durchschnittskurve der Kugel und der mit einem Mittelpunkt versehenen Umdrehungsflächen des zweiten Grades eben so, wie früher (1) und (2) Durch Umformung lassen sich die Gleichung (1 und 5) zwischen 3 rechtwinkligen Coordinaten auf eine einzige mit 2 veränderlichen Grössen zurückführen. Denn es sei $\sigma$ der Radiusvektor, $\varphi$ der Winkel, den seine horizontale Projektion mit der Axe x macht, und $\psi$ der Winkel seiner vertikalen Projection auf die Ebene xz mit der Axe x; so wird $\frac{y}{x}=\mathrm{tg}\,\varphi$ und $\frac{z}{x}=\mathrm{tg}\,\psi$ und $\sigma=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$,

also $x=\frac{\sigma}{\sqrt{(1+\mathrm{tg}^2\psi+\mathrm{tg}^2\varphi)}}$ $y=\frac{\sigma\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{(1+\mathrm{tg}^2\varphi+\mathrm{tg}^2\psi)}}$

$z=\frac{\sigma\,\mathrm{tg}\,\psi}{\sqrt{(1+\mathrm{tg}^2\psi+\mathrm{tg}^2\varphi)}}$ und $\frac{x}{z}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\psi}$ $\frac{y}{z}=\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{tg}\,\psi}$.

Substituirt man diese Werthe für $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ in die Kegel- und Kugel-Gleichung, so findet man für den Durchschnitt beider:

$$(\mathfrak{A}(1+\mathrm{tg}^2\varphi)+\mathfrak{B}\mathrm{tg}^2\psi)^2=(1+\mathrm{tg}^2\psi+\mathrm{tg}^2\varphi)$$
$$(\mathfrak{E}+\mathfrak{C}\mathrm{tg}\,\varphi+\mathfrak{D}\mathrm{tg}^2\psi \text{ und } \sigma=R.$$

Um die häufige Wiederholung des Zeichens tg zu vermeiden, setze man $\mathrm{tg}\,\varphi=t$ und $\mathrm{tg}\,\psi=u$ und lasse $\sigma=R$ unberücksichtigt: dann ist die verlangte Gleichung der Curven, welche durch den Schnitt der Kugel und der Rota-

tions-Flächen zweiter Ordnung mit Mittelpunkt entstehen folgende:

$$(\mathfrak{A}(1+t^2)+\mathfrak{B}u^2)^2=(1+u^2+t^2)\ (\mathfrak{E}+\mathfrak{B}u+\mathfrak{D}u^2)$$

§. 6.

Diese letztere Gleichung (7) zwischen den sphäri schen Axen-Coordinaten t und u lässt sich wie eine Gleichung einer ebenen Curve mit zwei veränderlichen Grösen behandeln, indem zu jedem u ein entsprechendes t gehört. Die Auflösung dieser Gleichung zeigt, dass t im Allgemeinen vier gleiche und entgegengesetzte Werthe habe: denn es ist

$$t=\pm\sqrt{(-2\mathfrak{A}^2+[\mathfrak{E}+\mathfrak{C}u+u^2(\mathfrak{D}-2\mathfrak{A}\mathfrak{B})]\pm\sqrt{[\mathfrak{E}+\mathfrak{C}u+u^2(\mathfrak{D}-2\mathfrak{A}\mathfrak{B})]^2+4\mathfrak{A}^4u^2[\mathfrak{E}+\mathfrak{C}u+(\mathfrak{D}-\mathfrak{B}^2)u^2]}}:2\mathfrak{A}^2$$

Ob aber nur zwei dieser Werthe reell sind, wie aus der Vergleichung mit den Projectionen in der Ebene yz hervorgehn wird, lässt sich aus den unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdrücken nicht entscheiden. Für u $=0$ wird $t=\sqrt{(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}^2)}:\mathfrak{A}$, so dass für $\mathfrak{E}\gtrless\mathfrak{A}^2$, t beziehungsweise reell, Null oder unmöglich ist.

Für $t=0$ erhält man: $-u^4-\frac{\mathfrak{C}}{(\mathfrak{B}^2-\mathfrak{D})}u^3+\frac{(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{D}-\mathfrak{E})}{(\mathfrak{B}^2-\mathfrak{D})}u^2-\frac{\mathfrak{C}}{(\mathfrak{B}^2-\mathfrak{D})}u+\frac{(\mathfrak{A}^2-\mathfrak{E})}{(\mathfrak{B}^2-\mathfrak{D})}=0$ eine Gleichung des vierten Grades, welche im Allgemeinen vier Werthe von u oder $\psi$ angiebt, wenn alle vier Wurzeln reell sind. Sind blos zwei Wurzeln reell, so besteht die Curve aus einem Zuge. Ist $\mathfrak{A}^2=\mathfrak{E}$, so besteht sie aus zwei im Anfang der Coordinaten an einander grenzenden Theilen, sind alle vier Wurzeln reell, so besteht die Curve aus zwei geschlossenen getrennten Theilen.

§. 7.

Der Differential-quotient $\frac{dt}{du}$ giebt die Lage der sphärischen Tangente ebenso an, wie bei ebenen Curven, so

dass die Bedingung $\frac{dt}{du} = o$ die Stelle anzeigt, wo die sphärische Tangente der Axe $\psi$ parallel ist, und $\frac{dt}{du} = \frac{1}{0}$ diejenige, wo sie senkrecht auf derselben ist. Aus der Gleichung (7) leitet man ab:

$$\frac{dt}{du} = ([u\mathfrak{H} + (\frac{\mathfrak{C}}{2} + \mathfrak{D}u)(1 + u^2 + t^2) - 2\mathfrak{B}\mathfrak{G}u]) : t(2\mathfrak{A}\mathfrak{G} - \mathfrak{H})$$

wo $\mathfrak{G} = [\mathfrak{A}(1+t^2) + \mathfrak{B}u^2]$ und $\mathfrak{H} = (\mathfrak{E} + \mathfrak{C}u + \mathfrak{D}u^2)$

Die Bedingung $\frac{dt}{du} =$ führt auf eine Gleichung des achten Grades, über deren Wurzeln sich wenig sagen lässt:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{H}\,[\mathfrak{B}^2u^2 + u^2(\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{D}) - \frac{\mathfrak{C}u}{2}] + u^2(\frac{\mathfrak{E}}{2} + \mathfrak{D}u)^2(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$$
$$- \mathfrak{H}\mathfrak{B}u(\frac{\mathfrak{C}}{2} + \mathfrak{D}u) = \mathfrak{H}(\frac{\mathfrak{C}}{2} + \mathfrak{D}u - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}u)\sqrt{(u^2(\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{D}) - u\frac{\mathfrak{C}}{2})}$$

Die andere Bedingung $\frac{dt}{du} = \frac{1}{0}$ liefert die Werthe

$$t = o \text{ und } u = (\mathfrak{C} + \sqrt{[16\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})\mathfrak{E} - 4\mathfrak{D}\mathfrak{E} + \mathfrak{C}^2]}) : 8\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) - 2\mathfrak{D}.$$

Sind die Werthe von u möglich, so wird die Curve, wenn sie aus zwei getrennten Theilen besteht, sechs Punkte in der Axe der $\psi$ darbieten, in welchen die Tangente senkrecht auf der Axe der $\psi$ steht, und die Curve berührt; die Curve hat dann bei m Einbiegungen. Sind aber die Werthe von u unmöglich, so fallen die Einbiegungen bei m weg und blos vier Berührungspunkte sind möglich, wenn die Curve aus zwei Theilen besteht. fig. $\alpha$.

§. 8.

Die durch (7) bezeichnete Curve wird von der vertikalen Ebene der xz oder von dem Kreisbogen, auf welchem die Werthe von $\psi$ gezählt werden in zwei gleiche und ähnliche Theile getheilt. Es ist zu untersuchen, ob durch eine Verschiebung des Coordinaten-Anfangs auf der Axe der $\psi$ einige ungerade Glieder von u zum Verschwinden gebracht werden können, so dass die Curve durch die Axe der $\psi$ in zwei symmetrische Hälften getheilt

wird. Es sei die Entfernung des neuen Coordinaten Anfangs von dem alten c, und die Axen-Coordinaten irgend eines Punktes in Bezug auf diesen neuen Anfang t', u'; so darf man nur (8) $u = \frac{\sin. c + \text{Cos. } c\, u'}{\text{Cos. } c - \sin. c\, u'}$, $t = \frac{t'}{\text{Cosc.} - \text{sinc. } u'}$ in (7) eintragen, und nachsehen, welche Coefficienten von u' verschwinden können.

Denn es sei (fig. 2) YV der Aequator oder die Axe der $\varphi$ und XV der Meridian oder die Axe der $\psi$ und V der Anfang der Coordinaten, die für den Punkt C, $VP = \psi$ und $VQ = \psi$ sind. Der neue Anfang sei in K, so dass $VK = c$, $KL = \varphi'$, $KP = \psi'$ ist. Die Winkel YVX, YPX, XQV und X'LK sind 90°. Im sphärischen Dreieck VCP ist $\text{tg CV} = \frac{\text{tg VP}}{\text{Cos. PVC}}$, im Dreieck VCQ ist $\text{tg CV} = \frac{\text{VQ}}{\text{Cos. QVC}}$, und $QVC = 90 - PVC$, daher $\text{tg PVC} = \frac{\text{tg QV}}{\text{tg PV}}$; weil auch $\text{tg PVC} = \frac{\text{tg CP}}{\sin. \text{VP}}$, so folgt tg QV Cos. PV = tg CP oder tg $\varphi$ Cos. $\psi$ = tg CP; eben so ist tg $\varphi'$ Cos. $\psi'$ = tg CP und daher tg $\varphi'$ = tg $\varphi$ ([Cos. c Cos. $\psi'$ − sin. c sin. $\psi'$] : Cos. $\psi''$]) wegen $\psi = c + \psi'$; und endlich

$$\text{tg } \varphi = t = \frac{\text{tg } \varphi'}{\text{Cos. c} - \sin. \text{c tz } \psi'} = \frac{t'}{\text{Cos. c} - \sin. c.\ u'}$$

und wegen tg $\psi$ = tg $(\psi' + c)$ u, $= \frac{\sin. c + \text{Cos c . u'}}{\text{Cos. c} - \text{u' sin. c}}$

Werden die Werthe (8) für t und u in der Gleichung (7) eingetragen, so findet man:

$(\delta + \varepsilon\, u^{12} + \zeta u' + \mathfrak{A} t^{12})^{\ 2} = (1 + u^{12} + t^{12})(k + \mu\, u' + \lambda\, u^{12})$ oder $u^{14}(\varepsilon^2 - \lambda) + u^{12} t^{12} + 2\varepsilon\mathfrak{A} - u^{12} t^{12} \lambda + t^{14} \mathfrak{A}^2$, $+ u^{13}(2\varepsilon\zeta - \mu) + u' t^{12}(2\mathfrak{A}\delta - \mu)$, $+ u^{12}(\zeta^2 + 2\varepsilon\delta - \lambda k) + t^{12}(2\mathfrak{A}\delta - k)$, $+ u'(2\delta\zeta - \mu)$, $+ \delta^2 - k = 0$, wo der Kürze wegen gesetzt worden ist:

$\delta = \mathfrak{A}$ Cos. $^2c + \mathfrak{B}$ sin. $^2c$, $\varepsilon = \mathfrak{A}$ sin. $^2c + \mathfrak{B}$ Cos. $^2c$, $\zeta = 2$ sin. c Cos. c $(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$, $k = \mathfrak{C}$ Cos. $^2c + \mathfrak{C}$ sin. c Cos. c $+ \mathfrak{D}$ sin.$^2$ c, $\lambda = \mathfrak{C}$ sin. $^2c - \mathfrak{C}$ sin. c Cos. c $+ \mathfrak{D}$ Cos. $^2c$, $\mu = \mathfrak{C}$ (Cos. $^2c$ — sin. $^2c$) $+$ 2 sin. c Cos. c $(\mathfrak{D} - \mathfrak{C})$.

Die Gleichung (9) wird in Bezug auf u′ nur dann symmetrisch, wenn $\zeta$ und $\mu = 0$, d. h. wenn $c = 0$ oder $= 90$ und $\mathfrak{C} = 0$ ist. Der Fall $\mathfrak{C} = 0$ wird bald ausführlich betrachtet werden. Im Allgemeinen also kann die Curve in Bezug auf u′ uict symmetrisch werden.

§. 9

Ausser den bisher gebrauchten Axen-Coordinatcn worden die Polar-Coordinaten und Applikaten angewendet. Um die Gleichung (7) in eine andere mit Polar-Coordinaten zu verwandeln, setze man $t = tg\ \varrho$ sin. $\nu$ $= tg\ \varrho$ Cos. $\nu$ wo $\varrho$ der sphärische Radius vektor und $\nu$ der Winkel desselben mit der Axe der $\psi$ ist. Man erhält:

(10) $[\mathfrak{A} + tg^2\varrho\ (\mathfrak{A}$ sin. $^2\nu + \mathfrak{B}$ Cos. $^2\nu)]^2 = (1 + tg\,\varrho^2)\ (\mathfrak{E} + \mathfrak{C} + tg\ \varrho$ Cos. $\nu + \mathfrak{D}\ tg\ \varrho^2$ Cos.$^2$ $\nu$). (fig. 3)

Diese Umformung ist im Allgemeinen von keinem Nutzen, weil tg $\varrho$ und $\nu$ durch eine vollständige Gleichung des vierten Grades bestimmt sind. In dem besondern später zu behandelnden Falle, wo $\mathfrak{C} = 0$ ist, werden die Polar-Cnoodinaten zur bequemern Darstellung benutzt; daher will ich die fernere Auseinandersetzung bis dahin verschieben.

§. 10.

Die Applicaten hängen mit den Axen-Coordinaten durch die Ausdrückc tg $y' =$ tg y Cos. x, tg $x' =$ tg x Cos. y zusammen (Gud. Seite 3), wo $y = VQ$, $x = VP$, $x' = QM$, $y' = PM$ oder mit Beibehaltung der in den frühern §§ gebrauchten Buchstaben : tg $VQ = u$, tg $VP = t$, tg $QM = t'$, tg $PM = u'$. Man darf daher nur in der Gleichung (7) für u und t die Werthe $u^2 = \frac{u'^2\ (1 + t'^2)}{1 - u'^2\ t'^2}$ $t^2 = \frac{t'^2\ (1 + u'^2)}{1 - u'^2\ t'^2}$ eintragen, so erhält man die Gleichung mit Applicaten:

(11) $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}t'^2)^2(1+u'^2)=(1+t'^2)(\mathfrak{E}+u'^2t'^2(\mathfrak{D}-\mathfrak{E})+\mathfrak{D}t'^2+\mathfrak{E}t\sqrt{(1+u'^2)(1+u'^2t'^2)})$ Im Allgemeinen ist sie wegen der Wurzelgrössen unbequem; für den besonderen Fall $\mathfrak{E}=\mathfrak{D}=0$ geht sie in Bezug auf u' in eine Gleichung des zweiten Grades über: $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}t'^2)^2(1+u'^2)=(1+t'^2)[\mathfrak{E}(1-u'^2t'^2)]$ (fig. 4.)

## Projectionen der Curven.

### §. 11.

Die Projection der Curven auf die horizontale Ebene xy ist: $y^4(N-M)^2+[x^2(N-M)-2ANx+A^2N+MR^2+MC^2+P]^2+2y^2(N-M)[\ldots]=4M^2C^2(R^2-x^2-y^2)$

oder $y=\frac{1}{N-M}\sqrt{(-(N-M)^2x^2+2AN(N-M)x-(N-M)(A^2N+MR^2+P)-MC^2(M+N)+2MC\sqrt{[MNC^2+(N-M)(2ANx+A^2N+R^2N+P)]}}$

Man sieht, dass die Curve (12) durch die Axe der x in zwei Hälften getheilt wird. Man sieht ferner, dass diese Projection eine geschlossene Curve ist, weil das höchste Glied: $y^4+2y^2x^2+x^4=(y^2+x^2)^2=0$ unmögliche Wurzeln liefert, wenn y und x geltende Werthe haben. Für $y=0$ ist: $x^4(N-M)^2-4(N-M)ANx^3+x^2[2F(N-M)+4A^2N^2+4M^2C^2]-x4ANF-4M^2C^2R^2=0$

und für $x=0$

$y=\frac{1}{N-M}\sqrt{(-(N-M)(F-MC^2)-MC^2(N+M)+2MC\sqrt{[MNC^2+(N-M)(A^2N+R^2N+P)]})}$.

Durch Coordinatenveränderung lässt sich die Gleichung (12) nicht symmetrisch machen. Denn wenn man den Anfang der Coordinaten auf der x so verschiebt, dass man

statt $x\,x' + \frac{AN}{N-M}$ setzt, so verschwinden nur die Coefficienten von $x'\,y^{12}$ und $x^{13}$.

Die Durchführung der Bedingungen wenn $\frac{dy}{dx} =$ $(-[2\,y^2\,(N-M) + 2\,(x^2\,(N-M) - 2\,ANx + F)] \cdot [2\,x\,(N-M) - 2\,AN] - 8\,M^2C^2\,x) : (4\,y\,(y^2\,(N-M)^2 - [(N-M)(\quad) + 2\,M^2\,C^2])$ Null oder unendlich wird, werde ich später bei den besondern Fällen vornehmen.

## §. 12.

Die Gleichung der Projection auf die Ebene yz:

$$\begin{aligned} 4\,y^2\,A^2\,N^2 = \; & -z^4\,(N-M)^2 \\ & -4\,z^3\,MC\,(N-M) \\ & -2\,z^2\,[2A^2N^2 + 3M^2C^2 - MNC^2 + (M-N)\,H] \\ & +4\,z\,MC\,[MC^2 + H^2] \\ & +4\,N^2A^2R^2 - (C^2M + H)^2 \text{ wo } H = \\ & NR^2 + NA^2 + P \quad \ldots (13) \end{aligned}$$

zeigt, dass es nur zwei Werthe der Applicate y giebt; und dass die Curve in einen endlichen Raum eingeschlossen ist, weil y unmöglich wird für sehr grosse Werthe von z. Durch Verlegung des Coordinaten-Anfanges kann die Gleichung in Bezug auf z nur in besonderen Fällen symmetrisch werden.

Für $z = 0$ ist $4\,y^2A^2N^2 = 4\,N^2A^2R^2 - (C^2M + H)^2$. Für $y = 0$ wird die rechte Seite der Gleichung Null, und hat dann 4, 2, oder gar keine reellen Werthe von z. Setzt man den Zähler des Digerential-quotienten $\frac{dy}{dz} =$ $([-4\,z^3\,(N-M)^2 - 12\,z^2\,MC\,(N-M) - 4\,z\,(2\,N^2A^2 + 3\,M^2C^2 - MNC^2) + H\,(M-N) + 4\,MC\,(MC^2 + H)]) : 8\,y\,A^2N^2 = 0$, so zeigt die daraus hervorgehende Gleichung des dritten Grades wenigstens eine reelle Wurzel an. Der Nenner gleich Null, verlangt $y = 0$.

Aus dem Gesagten wird geschlossen, dass die Projection auf yz entweder aus einem ovalen, birnförmigen Theile, oder aus zwei in einem Punkte an einander grenzenden, Schleifen ähnlichen, oder ganz getrennten Theilen besteht. Weil ferner diese Projection, der Figur auf der Kugel am ähnlichsten ist, so folgt auch, dass die spärische Curve nur zwei Werthe von t habe, entsprechend denen von y in der Projections-Curve.

§. 13.

Die Projection auf xz, welche eine Seitenansicht der Curve darbietet, ist eine Linie der zweiten Ordnung wie überhaupt zwei Oberflächen der zweiten Ordnung, welche eine gemeinschaftliche Hauptebene haben, sich immer so schneiden, dass die Projection des Durchschnitts auf der Hauptebene eine Linie des zweiten Grades ist. Die Projection:

$z^2 (M - N) - 2CMz + MC^2 + NR^2 + P + N(A^2 - 2Ax) = 0$, (14) oder $z = \frac{CM}{M-N} \pm \frac{1}{M-N} \sqrt{(C^2MN - (M-N)(P + NR^2 + NA^2 - 2ANx))}$ ist eine Parabel, deren Parameter $\frac{2NA}{(M-N)}$, deren Scheitel im Punkte ist, welcher durch die Coordinaten $\frac{CM}{M-N}$ und $\frac{(M-N)(NA^2 + NR^2 + P) - NMC^2}{M-N}$ bestimmt ist.

Verlegt man den Anfang der Coordinaten, indem man für z, $z' + \frac{CM}{M-N}$ und für x,

$$\frac{x' + (M-N)(NA^2 + NR^2 + P) - MNC^2}{2AN(M-N)}$$

in (14) setzt, so erhält man $z'^2 = \frac{2ANx'}{(M-N)}$

## Besondere Fälle.

§. 14.

Wenn man den Mittelpunkt der Rotationsfläche in die Axe der x xerlegt, so wird $C = o$. Ist C nicht $= o$, während $A = o$ wird, so fällt der Mittelpunkt in die Axe der z. Der wichtigste Fall is $C = o$. Ffir $A = o$ und für $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ sind die Durchschnitte Kreise, wie sogleich erwiesen werden wird.

§. 15. $A = o$.

Die Hauptgleichung (7) wird in diesem Falle (15) $[\mathfrak{A}(1+t^2) + \mathfrak{B}u^2]^2 = \mathfrak{D}u^2(1+u^2+t^2)$ oder $t^2 = -\frac{[2\mathfrak{A}^2 + u^2(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{D})]}{2\mathfrak{A}^2} + \frac{u^2}{2\mathfrak{A}^2}[(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{D})^2 - 4\mathfrak{A}^2(\mathfrak{B} - \mathfrak{D})]$ wo $\mathfrak{A} = R^2N + C^2M + P$, $\mathfrak{B} = R^2M + C^2M + P$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C} = o$, $\mathfrak{D} = 4R^2C^2M$. Verlegt man den Coordinaten-Anfang in den Pol des Kreises, auf welchem die $\varphi$ gezählt werden, so dass $c = 90^0$ (§. 8) so wird Gleichung (9) in $[\mathfrak{A}(u^{12} + t^{12}) + \mathfrak{B}]^2 = o$ übergehen, weil $\delta = \mathfrak{B}$, $\varepsilon = \mathfrak{A}$, $\zeta = o$, $k = \mathfrak{D} = o$, $\lambda = \mathfrak{C} = \mathfrak{C} = o$, $\mu = o$ ist. Diese Gleichung bezeichnet einen Parallelkreis, der mit $\varphi$ denselben Pol gemein hat, und dessen sphärisehen Halbmesser $-\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ ist. Die Projection auf xy wird im Kreis $y^2 + x^2 = (-(N - M)(P + MR^2) - MC^2(N + M) \pm 2MC\sqrt{[MNC^2 + (N - M)(R^2N + P)]}) : (N - M)^2$ Die auf yz bezeichnet zwei mit y parallele grade Linien; denn die Gleichung ist: $-z^4(N - M)^2 - 4z^3MC(N - M) - 2z^2[3M^2C - MNC^2 + (M - N)H] + 4zMC(MC^2 + H) - (C^2M + H)^2 = o$ von $H = P + NR^2$. Eben so sind die Projectionen auf xz zwei mit x parallele Gerade wie aus $z^2(M - N) - 2CMz + MC^2 + NR^2 + P = o$ zu ersehen ist.

§. 16. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

Dieser Bedingung kann nnr Genüge geleistet werden, wenn $M = N$, ($M = -N$ giebt nicht $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$).

Die Umdrehungsoberfläche geht dann in eine Kugel über, und der Durchschnitt muss ein Kreis sein. Dieses folgt auch aus den Gleichungen, welche sich dadurch als richtig erwiesen. Denn aus (7) wird eine sphärische Linie des zweiten Grades:

$$(1 + t^2 + u^2)\ \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{E} + \mathfrak{C}\,u + \mathfrak{D}\,u^2 \text{ oder}$$
$$(1 + t^2 + u^2)\ \mathfrak{A}^2 = 4\,R^2M^2\,(A + C\,u)^2 \qquad (16)$$

Setzt man aus (§. 8) $u = \frac{\sin.\ c + u'\ \text{Cos.}\ c}{\text{Cos.}\ c - \sin.\ c\ u'}$ $t = \frac{t'}{\text{Cos.}\ c - \sin.\ c\ u'}$, in die Gleichung (16), so wird daraus: $(u'^2 + t'^2)\ \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{E}\ \text{Cos.}\ ^2c + \mathfrak{D}\ \sin.\ c + \mathfrak{C}\ \sin.\ c\ \text{Cos.}\ c + u'\ [2\ \sin.\ c\ \text{Cos.}\ c\ (\mathfrak{D} - \mathfrak{E}) + \mathfrak{C}\ (\text{Cos.}\ ^2c - \sin.\ ^2c)] + u'^2\ (\mathfrak{E}\ \sin.\ ^2c + \mathfrak{D}\ \text{Cos.}\ ^2c - \mathfrak{C}\ \text{Cos.}\ c\ \sin.\ c)$. Damit das Glied $u'\ [2\ \sin.\ c\ \text{Cos.}\ c\ (\mathfrak{D} - \mathfrak{E}) + \mathfrak{C}\ (\text{Cos.}\ ^2c - \sin.\ ^2c)]$ verschwinde, muss

$$\text{tg}\ c = \frac{\mathfrak{D} - \mathfrak{E}}{\mathfrak{C}} \pm \frac{1}{\mathfrak{C}}\sqrt{[\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{D}^2 + \mathfrak{E}^2 - 2\,\mathfrak{D}\mathfrak{E}]} = \frac{C}{A}$$

oder $-\frac{A}{C}$ sein. Wird der Werth $\frac{C}{A}$ für tg c in die umgeänderte Gleichung gesetzt, so erhält man die Gleichung eines sphärischen Kreises:

$$u'^2 + t'^2 = \frac{4R^2M^2\,(A^2 + C^2)}{\mathfrak{A}^2} \qquad (17)$$

Die Projection auf xy ist eine Ellipse: $(F - 2\,AN\,x)^2 = 4\,N^2C^2\,(R^2 - x^2 - y^2)$, eben so die auf yz : : $4\,y^2A^2N^2 = (F - 2\,CN\,z)^2 - 4\,z^2N^2A^2$ und die auf xz eine Gerade: $2\,CM\,z + (2\,x\,AN - F) = o$ wo $F = (A^2M + R^2M + C^2M + P)$.

### §. 17. C = o.

Durch diese Annahme wird wie schon gesagt der Mittelpunkt der Rotationsflächen in die Axe der x versetzt, und Symmetrie der Durchschnitte erlangt. Vergleicht man diese Figuren mit den Schnitten, für welche C nicht gleich Null ist, so kann man die Gestalt der letztern leichter erkennen. Weil für $C = o$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} = o$ wird, so

geht die Gleichung (7) über in: $[\mathfrak{A}(1+t^2)+\mathfrak{B}u^2)\,\mathfrak{E}$

oder $t^2 = \frac{[-(2\mathfrak{A}^2-\mathfrak{E})-2\mathfrak{A}\mathfrak{B}u^2]\pm\sqrt{\mathfrak{E}^2+4\mathfrak{E}\mathfrak{A}u^2(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})}}{2\,\mathfrak{A}^2}$ (18)

Weil für $u = o$, $t = \sqrt{\frac{\mathfrak{E}-u^2}{\mathfrak{A}^2}}$ und für $t = o$, $u = \pm$

$\sqrt{\frac{[\mathfrak{E}-2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\pm\sqrt{[(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{E})^2+4\mathfrak{B}^2(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}^2)]}}{2\,\mathfrak{B}^2}}$

so wird die Curve für $\mathfrak{A}^2 < \mathfrak{E}$ aus einem Zuge bestehen; aus zwei im Ursprung sich berührenden für $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{E}$ und $u^2[u^2\,\mathfrak{B}^2+(2\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{A}^2)] = o$, endlich für $\mathfrak{A}^2 > \mathfrak{E}$ aus zwei getrennten Theilen, weil dann u vier reelle Werthe hat.

§. 18.

Eine Verlegung des Anfangs der Coordinaten ist unnütz, weil die Gleichung (18) sowohl in Bezug auf u als auf t symmetrisch ist. Auch aus (9) folgt dieses. Damit $\zeta$ u' und $\mu$ u' daselbst verschwinden, muss $\zeta = o$ und $\mu = o$ sein; aber hier ist $\zeta = 2$ sin. c Cos. c $(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})$ $\mu = -2$ sin. c Cos. c $\mathfrak{E}$; daher kann nur für $c = o$ oder $c = 90$ den Bedingungen Genüge geschehen.

§. 19.

Der erste Differential-quotient ist:

$\frac{dt}{du} = \frac{u\,(\mathfrak{E}-2\,\mathfrak{B}\mathfrak{G})}{t\,(2\,\mathfrak{G}\mathfrak{A}-\mathfrak{E})}$ wo $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}(1+t^2)+\mathfrak{B}\,u^2$.

Er wird Null, wenn $u = o$ und $u = \frac{1}{2\mathfrak{B}}\sqrt{\left\{\frac{\mathfrak{E}(\mathfrak{A}-2\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}\right\}}$

und ist unendlich, wenn $t = o$ und $u = \sqrt{\frac{-\mathfrak{E}}{4\mathfrak{A}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})}}$

Der letztere Werth von u ist stets unmöglich, weil $\mathfrak{E} = 4\,R^2A^2N^2$ positiv ist und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ dasselbe Zeichen haben.

Die Gleichung der Tangente ist $t'' - t = \frac{dt}{du}(u''-u)$, wenn sie durch den Punkt geht, dessen Coordi-

naten t', u', sind. In unserm Falle: $t' \quad t = \frac{u\,(\mathfrak{E} - 2\,\mathfrak{BG})}{t\,(2\,\mathfrak{GA} - \mathfrak{E})}$ $(u' - u)$. Die Coordinaten des Mittelpunktes der sphärischen Tangente sind: $u''' = \frac{u\,(\mathfrak{E} - 2\,\mathfrak{BG})}{t^2\,(2\,\mathfrak{GA} - \mathfrak{E}) - u^2\,(\mathfrak{E} - 2\,\mathfrak{BG})}$

$$t''' = \frac{-\,(2\,\mathfrak{AG} - \mathfrak{E})\,t}{t^2\,(2\,\mathfrak{AG} - \mathfrak{E}) - u^2\,(\mathfrak{E} - 2\,\mathfrak{BG})}$$

Eben so sind auch die Formeln für die Normale den Krümmungs-Halbmesser und dessen Mittelpunkte nach (Gud. S. 89) leicht zu finden.

## §. 20.

Die Gleichung der Curve in Polar-Coordinaten geht aus (10) in: $[\mathfrak{A} + \varrho^{12} \sin.\ \nu^2\ (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) + \varrho^{12}\ \mathfrak{B}]^2 = (1 + \varrho^{12})\ \mathfrak{E}$ über, wo tg $\varrho = \varrho'$ oder $\varrho^{12} = \big([-2\,\mathfrak{A}\,[(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\sin.^2\nu + \mathfrak{B})] + \mathfrak{E} - \sqrt{[4\,\mathfrak{E}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2 \sin.^4\nu + 4\,\mathfrak{E}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\,(2\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\sin.^2\nu + \mathfrak{E}^2 - 4\,\mathfrak{A}\mathfrak{E}\mathfrak{B} + \mathfrak{E}\mathfrak{B}^2]}\big) : [2\sin.^4\nu\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2 + 2\,\mathfrak{B}^2 + 4\,\mathfrak{B}\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\ \sin.^2\nu]$. Für $\varrho^{12} = 0$ findet man eine Gleichung des vierten Grades: $[8\,\mathfrak{E}\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 4\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{B}^2] + 8\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\,(\mathfrak{E}\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B})\ \sin.^2\nu + 4\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2\,(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{E})\ \sin.^4\nu = 0$, welche aber nur dann 2 mögliche Werthe hat, wenn die Curve aus 2 in einem Punkt zusammenstossenden Theilen besteht.

## §. 21.

Die Lage der sphärischen Tangente lässt sich durch den Winkel des Radiusvectors mit der Tangente bestimmen. Es sei (fig. 5) dieser Winkel w, so ist tg w = sin. $\varrho \frac{d\nu}{d\varrho}$ oder tg $w = \big(-\sqrt{1 + \varrho^{12}}\,(2\,[\sin.^2\nu\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) + \mathfrak{B}]\,(\mathfrak{A} + \varrho^{12}\sin.^2\nu\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) + \varrho^{12}\,\mathfrak{B}) - \mathfrak{E})\big) : [2\ \sin.\ \nu\ \mathrm{Cos.}\ \nu\ (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\,(\mathfrak{A} + \varrho^{12}\ \sin.^2\nu\ (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) + \varrho^{12}\ \mathfrak{B})]$ Damit tg w = 0 sei, muss $\sqrt{1 + \varrho^{12}}$ oder $(\quad)$ verschwinden. Die erste Forderung ist unmöglich, die andere führt auf: $9\,\mathfrak{E}\,\varrho^{14} + \varrho^{12}\,(12\,\mathfrak{E} - 4\,\mathfrak{A}^2) + 4\,\mathfrak{E} - 4\,\mathfrak{A}^2 = 0$ oder $\varrho^{12} = -2\,(3\,\mathfrak{E} - \mathfrak{A}^2) \pm 2\sqrt{(9\,\mathfrak{E}\,(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{E}) + (3\,\mathfrak{E} - \mathfrak{A}^2)^2)} : 9\,\mathfrak{E}$.

Ist nun $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}^2$, so wird $\varrho' = 0$ oder unmöglich. Ist $\mathfrak{E} > \mathfrak{A}^2$ also auch $3\,\mathfrak{E} > \mathfrak{A}^2$ so sind nur zwei Werthe von $\varrho'$ möglich, weil $\varrho'^2 = (-(\ ) \pm 2\sqrt{(\ )^2 - 9\,\mathfrak{E}(\ )}) : 9\,\mathfrak{E}$. Ist $\mathfrak{E} < \mathfrak{A}^2$, so ist der irrationale Theil grösser als der rationale, das negative Zeichen von der Wurzelgrösse giebt daher keinen möglichen Werth von $\varrho'$. Damit der Winkel w ein rechter sei, muss $\nu = 0$ sein, dem $\varrho'^2 = (-(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{E}) + \sqrt{(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{E})^2 + (\mathfrak{E} - \mathfrak{A}^2)\,4\mathfrak{B}^2}) : 2\,\mathfrak{B}^2$ entspricht; oder $\nu = 90$, wozu $\varrho'^2 = \frac{\mathfrak{E} - \mathfrak{A}^2}{\mathfrak{A}^2}$ gehört. In dem letztern Falle muss $\mathfrak{E} > \mathfrak{A}^2$ sein, oder die Curve aus einem Theile bestehen. Die dritte Bedingung: $(\mathfrak{A} + \varrho'^2 \sin.^2 \nu\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) + \varrho'^2\,\mathfrak{B}) = 0$ lässt sich nicht erfüllen.

## §. 22.

Die Projection auf die Ebene xy ist: $y^2\,(N - M) + [x^2\,(N - M) - 2\,AN\,x + F] = 0$ oder $y^2 + (x - \frac{AN}{N - M})^2 = \frac{A^2N^2 - F\,(N - M)}{(N - M)^2}$, ein Kreis, welcher für $x' = x - \frac{AN}{N - M}$ in $y'^2 + x'^2 = \frac{A^2N^2 - F\,(N - M)}{(N - M)^2}$ übergeht, wo $F = A^2N + R^2M + P$.

Die auf xz ist: $z = \pm\frac{1}{-M - N}\sqrt{[(N - M)\,(P + NR^2 + NA^2 - 2\,x\,AN)]}$.

Die auf yz ist: $4\,y^2\,A^2N^2 = -z^4\,(N - M)^2 - 2\,z^2\,[2\,N^2A^2 + H\,(M - N)] + 4\,N^2A^2R^2 - H^2$ wo $H = NR^2 + NA^2 + P$.

Aus dem ersten Differential-quotienten $\frac{dy}{dz} = (-4\,z\,(z^2\,(N - M)^2 + [2\,N^2A^2 + (M - N)\,H])) : 8\,yA^2N^2$ folgt, dass wenn die Projection aus einem Theile besteht, die Applicate y zwei Maxima und ein Minimum, oder nur ein Maximum hat, so dass in jenem Falle 2 Fle-

xionspunkte existiren, in dem letztern keiner. Wenn ferner die Projection aus 2 einen Punkt gemein habenden Theilen besteht, so wird in diesem Punkte y ein Minimum und zugleich ist dieser Punkt ein Doppelpunkt. Wenn endlich die Projection aus zwei getrennten Theilen besteht, so sind nur zwei Maxima von y da.

## Anwendung der allgemeinen Gleichung auf den Schnitt der Kugel mit den einzelnen Flächen der zweiten Ordnung.

§. 23.

Die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen zweiter Ordnung mit Mittelpunkt: $M(z-C)^2 + Ny^2 + N(x-A)^2 + P = o$ wird nach den Zeichen und Werthen von MNP ein Ellipsoid, Hyperboloid mit einem Fach, mit zwei Fächern, Kegel oder Cylinder, und zwar geht sie über für das Ellipsoid in: $M(z-C)^2 + Ny^2 + N(x-A) - P = o$ oder wenn $\frac{M}{P} = \frac{1}{\gamma^2}$ $\frac{N}{P} = \frac{1}{\beta^2}$ gesetzt wird, in: $\frac{(z-C)}{\gamma^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{(x-A)}{\beta^2}^2 - 1 = o.$

für das zweifächrige Hyperboloid in: $M(z-C)^2 - Ny^2 - N(x-A)^2 - P = o$ oder wenn $-\frac{M}{P} = -\frac{1}{\gamma^2}$ $\frac{N}{P} = \frac{1}{\beta^2}$ gesetzt wird, in $-\frac{(z-C)^2}{\gamma^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{(x-A)}{\beta^2} + 1 = o$

für das einfächrige Hyperboloid in: $-M(z-C)^2 + Ny^2 + N(x-A)^2 - P = o$ oder wenn $\frac{M}{P} = \frac{1}{\gamma^2}$ $-\frac{N}{P} = -\frac{1}{\beta^2}$ ist in, $\frac{(z-C)^2}{\gamma^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{(x-A)^2}{\beta^2} + 1 = o.$

für den Kegel, in: $-M(z-C)^2 + Ny^2 + N(x-A)^2 = o.$

für den Cylinder in: $y^2 + (x-A)^2 + \frac{P}{N} = o$ oder wenn $\frac{P}{N} = -\beta^2$, in $y^2 + (x-A)^2 = \beta^2.$

Dadurch wird:

$$\mathfrak{A} = \begin{cases} N\left(R^2+A^2+C^2\frac{\beta}{\gamma^2}-\beta^2\right) & \text{für den Schnitt des Ellipsoids und der Kugel,} \\ -N\left(-R^2-A^2+C^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}-\beta^2\right) & \text{für den des zweifächrigen Hyperboloids u. d. Kugel,} \\ N\left(R^2+A^2-C^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}-\beta^2\right) & \text{für den des einfächerigen Hyperboloids und der Kugel,} \\ N\left(R^2+A^2-C^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) & \text{für den des Kegels und der Kugel,} \\ N\left(R^2+A^2-\beta^2\right) & \text{für Cylinder und Kugel.} \end{cases}$$

$$\mathfrak{B} = \begin{cases} N\left(R^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}+A^2+C^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}-\beta^2\right) & \text{für Ellipsoid und Kugel,} \\ -N\left(R^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}+A^2+C^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}-\beta^2\right) & \text{für das zweifächrige Hyperboloid und Kugel,} \\ N\left(-R^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}+A^2-C^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}-\beta^2\right) & \text{für das einfächrige Hyperboloid und die Kugel,} \\ N\left(-R^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}+A^2-C^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) & \text{für Kegel und Kugel,} \\ N\left(A^2-\beta^2\right) & \text{für Cylinder und Kugel.} \end{cases}$$

$$\mathfrak{C} = \begin{cases} 8R^2N^2AC\frac{\beta^2}{\gamma^2} & \text{für Ellipsoid und Kugel,} \\ -8R^2N^2AC\frac{\beta^2}{\gamma^2} & \text{für das zweifächrige Hyperboloid und Kugel,} \\ -8R^2N^2AC\frac{\beta^2}{\gamma^2} & \text{für das einfächrige Hyperboloid und Kugel,} \\ -8R^2N^2AC\frac{\beta^2}{\gamma^2} & \text{für den Kegel und die Kugel,} \\ 0 & \text{für den Cylinder und die Kugel.} \end{cases}$$

$\mathfrak{D} = 4\,R^2\,C^2\,\frac{\beta^4}{\gamma^4}\,N^2$ für alle übrigen.

$= 0$ für Cylinder.

$\mathfrak{E} = 4\,R^2A^2N^2.$

§. 24.

Trägt man diese Werthe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ in (7) ein, so hat man die Gleichungen für den Durchschnitt

der Kugel mit der besonderen Fläche. Es ist aber bequemer für Zahlen-Beispiele die Werthe von $\mathfrak{A}$ u.s.w. numerisch auszudrücken, und dann einzutragen.

Die Projectionen hingegen, welche nicht $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ u.s.w. sondern unmittelbar M, N, P enthielten, müssen besonders dargestellt werden.

Die auf xy aus (12) für den Schnitt des Ellipsoids und der Kugel:

$$y = \frac{1}{\gamma^2 - \beta^2}\sqrt{(-(\gamma^2 - \beta^2)^2 x^2 + 2Ax(\gamma^2 - \beta^2)\gamma^2 - (\gamma^2 - \beta^2)[A^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 + R^2\beta^2] - C^2\beta^2(\beta^2 + \gamma^2) \pm 2C\beta^2\sqrt{[C\gamma^2\beta^2 + (\gamma^2 - \beta^2)\gamma^2(-2Ax + A^2 + R^2 - \beta^2)]}}).$$

Für das zweifächrige Hyberb.

$$y = \frac{1}{\gamma^2 + \beta^2}\sqrt{(-(\gamma^2 + \beta^2)^2 x^2 + 2Ax(\gamma^2 + \beta^2)\gamma^2 - (\gamma^2 + \beta^2)[A^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 - R^2\beta^2] + C^2\beta^2(\gamma^2 - \beta^2) \pm 2C\beta^2\sqrt{[-C\gamma^2\beta^2 + \gamma^2(\gamma^2 + \beta^2)(-2Ax + A^2 + R^2 + \beta^2)]}})$$

einfächr. Hyperb. $y = \frac{1}{-(\gamma^2 + \beta^2)}\sqrt{(-(\gamma^2 + \beta^2)^2 x^2 + 2Ax(\gamma^2 + \beta^2)\gamma^2 + (\gamma^2 + \beta^2)[-A^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 + R^2\beta^2] - C^2\beta^2(\beta^2 - \gamma^2) \pm C\beta^2\sqrt{[-C\gamma^2\beta^2 + \gamma^2(\gamma^2 + \beta^2)(-2Ax + A^2 + R^2 - \beta^2)]}})$

Kegel. $y = \frac{1}{1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}}\sqrt{[-(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2})^2 x^2 + 2Ax(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}) - (1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2})(A^2 - \frac{\beta^2}{\gamma^2}R^2) + \frac{\beta^2}{\gamma^2}C^2(1 - \frac{\beta^2}{\gamma^2}) - \frac{2\beta^2}{\gamma^2}C\sqrt{[-\frac{\beta^2}{\gamma^2}C^2 + (1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2})(2Ax + A^2 + R^2)]}}]$

Cylinder: $y^2 + (x - A)^2 = \beta^2$.

Die Projectionen auf yz sind:

fürs Ellips. $4\,A^2\gamma^4y^2 = -z^4(\gamma^2-\beta^2)^2 - 2z^2[2A^2\gamma^4 + 3\beta^4C^2 - \beta^2\gamma^2C^2 - (\gamma^2-\beta^2)\gamma^2(R^2+A^2-\beta^2)] - 4z^3\beta^2C(\gamma^2-\beta^2) + 4\beta^2Cz(\beta^2C^2 + R^2\gamma^2 + A^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^2) + 4A^2R^2\gamma^4 - (C^2\beta^2 + R^2\gamma^2 + A^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)^2$

zweif. Hyp. $4A^2\gamma^4y^2 = -z^4(\gamma^2+\beta^2)^2 - 2z^2[2A^2\gamma^4 + 3\beta^4C^2 + \beta^2\gamma^2C^2 - (\gamma^2+\beta^2)\gamma^2(R^2+A^2+\beta^2)] + 4z^3\beta^2C(\beta^2+\gamma^2) - 4\beta^2Cz(-\beta^2C^2 + R^2\gamma^2 + A^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) + 4A^2R^2\gamma^4 - (-C^2\beta^2 + R^2\gamma^2 + A^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)^2$.

einf. Hyperb. $4\,A^2y^2\gamma^4 = -z^4(\gamma^2+\beta^2)^2 - 2z^2[2A^2\gamma^4 + 3\beta^4C^2 + \beta^2\gamma^2C^2 - \gamma^2(\gamma^2+\beta^2)(R^2+A^2-\beta^2)] + 4z^3\beta^2(\gamma^2+\beta^2)C + 4\beta^2Cz(\beta^2C^2 - R^2\gamma^2 - A^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) + 4R^2A^2\gamma^4 - (C^2\beta^2 - R^2\gamma^2 - A^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)^2$.

Kegel. $4\,A^2y^2 = -z^4\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)^2 + 4z^3C\frac{\beta^2}{\gamma^2}\left(1-\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) - 2z^2\left[2A^2 + 3\frac{\beta^4}{\gamma^4}C^2 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}C^2 - (R^2+A^2)\left(1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\right] - 4z\frac{\beta^2}{\gamma^2}C\left[R^2+A^2-\frac{\beta^2}{\gamma^2}C^2\right] + 4R^2A^2 - \left(R^2+A^2-C^2\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)^2$.

Cylinder. $4\,A^2y^2 = -z^4 + 2^2z(R^2-\beta^2-A^2) + 4A^2R^2 - (R^2+A^2-\beta^2)^2$.

Die Projection auf xz:

$z^2\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2}-1\right) - 2Cz\frac{\beta^2}{\gamma^2} + C^2\frac{\beta^2}{\gamma^2} + R^2 + A^2 - \beta^2 - 2Ax = 0$ fürs Ellipsoid und die Kugel,

$z^2\left(-\frac{\beta^2}{\gamma^2}-1\right) + 2Cz\frac{\beta^2}{\gamma^2} - C^2\frac{\beta^2}{\gamma^2} + R^2 + A^2 + \beta^2 - 2Ax = 0$ für das Hyperboloid mit 2 Fächern,

$z^2\left(-\frac{\beta^2}{\gamma^2}-1\right) + 2Cz\frac{\beta^2}{\gamma^2} - C^2\frac{\beta^2}{\gamma^2} + R^2 + A^2 - \beta^2 - 2Ax = 0$ Hyberb. mit einem Fach.

$z^2 \left(-\frac{\beta^2}{\gamma^2} - 1\right) + 2\,Cz\frac{\beta^2}{\gamma^2} - C^2\frac{\beta^2}{\gamma^2} + R^2 + A^2 - 2Ax$
$= 0$ für den Kegel,

$-z^2 + R^2 + A^2 - \beta^2 - 2Ax = 0$ für den Cylinder.

## Zahlen-Beispiele.

### I. Fall: $C = 0$.

§. 25.

Ex. 1. Für den Durchschnitt eines Ellipsoids und einer Kugel sei $R = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $A = \frac{1}{2}$, also $\mathfrak{A} = 1$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{4}$, $\mathfrak{C} = 1$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} = 0$ und $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{C}$. Die Gleichung der Curve in sphärischen Axen-Coordinaten ist: $(1 + t^2 + \frac{u^2}{4})^2 = (1 + u^2 + t^2)$ wenn man §. 23 berücksichtigt.
Für $t = 0$ ist $u = 0$ und $u \pm = \sqrt{8}$ also $\psi = 0$ und $\psi = 70^0\ 31'$. Für $u = 0$ ist $t = 0$.
Für $\frac{dt}{du} = 0$ ist $u = 0$ und $u = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$, oder $\psi = 0$ und $\psi = 58^0\ 31'$, denen die Werthe $\varrho = 0$ und $\varphi = 30^0$ entsprechen. Für $\frac{dt}{du} = \frac{1}{0}$ ist $t = 0$ und $u = \sqrt{-\frac{1}{3}}$ unmöglich.

In Polar-Coordinaten ist: $\varrho' = \sqrt{(8\,(1-3\sin.^2\nu))}$: $(1+3\sin.^2\nu)$, welche für besondere Werthe von $\nu$ die entsprechenden von $\varrho' = \mathrm{tg}\,\varrho$ giebt.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Für $\nu = 0$ | $\varrho' = \mathrm{tg}\ 70^0\ 31'$ | 20 | $59^0\ 20'$ |
| 5 | $= 69^0\ 54'$ | 25 | $51^0\ 26'$ |
| 10 | $= 67^0\ 59'$ | 30 | $38^0\ 56'$ |
| 15 | $= 64^0\ 36'$ | 36 | $9^0\ 13'$ |

Der Anfang der sphärischen Coordinate ist (fig. 6) in A, CB ist die sphärische Axe der $\psi$ und ED die der $\varphi$.

$\widehat{AF} = \widehat{AG} = 58^0\ 31'$; $\widehat{AH} = \widehat{AI} = 30^0$; $\widehat{AK} = \widehat{AL} = 70^0\ 31'$

Ex. 2. R, $\beta$ und $\gamma$ mögen dieselben Werthe haben wie in Ex. 1., aber $A = \frac{1}{4}$; also $\mathfrak{A} = \frac{13}{16}$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{16}$, $\mathfrak{C} = \frac{1}{4}$ und $\mathfrak{A}^2 > \mathfrak{C}$. Die Gleichung der Curve: $[\frac{13}{16}(1 + t^2) + \frac{u^2}{16}]^2 = \frac{1}{4}(1 + u^2 + t^2)$ giebt für $t = o$, $u = \pm$ tg $60^0$ und $\pm$ tg $80^0\ 24'$; für $u = o$ ein unmögliches $t = \sqrt{-\frac{105}{169}}$. Ferner hat die Curve 2 Maxima bei $u = \pm$ tg $75^0\ 20'$ und $t =$ tg $25^0 - 25'$

In der Figur (7) ist $\widehat{AK'} = \widehat{AL} = 60^0$, $\widehat{AK} = \widehat{AL} = 80^0\ 24'$, $AH = 25^0\ 25'$.

Ex. 3. R, $\beta$, $\gamma$ haben dieselben Werthe wie in 1, aber $A = 1$, also $\mathfrak{A} = \frac{7}{4}$, $\mathfrak{B} = 1$, $\mathfrak{C} = 4$ und $\mathfrak{A}^2 < \mathfrak{y}$. Die Gleichung $[\frac{7}{4}(1 + t^2) + u^2]^2 = 4\ (1 + u^2 + t^2)$ für $t = o$, $u =$ tg $48^0\ 12'$, für $u = o$, $t =$ tg $28^0\ 58'$. Maxima hat die Curve nur bei $u = o$. (fig. 8.)

## §. 26.

Ex. 4. Durchschnitt des einfächrigen Hyperboloids mit der Kugel. Es sei $R = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $A = 1$, also $\mathfrak{A} = \frac{7}{4}$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}$, $\mathfrak{C} = 4$ und $\mathfrak{A}^2 < \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} > 2\,\mathfrak{B}$; also hat die Curve nach § 19 2 Maxima und und ein Minimum. Jene liegen bei $u =$ tg $57^0\ 10'$ und $t =$ tg $84^0\ 2'$, dieses bei $u = o$ und $t =$ tg $33^0 - 35'$. Die Gleichung der Curve: $[\frac{7}{4}(1 + t^2) + \frac{u^2}{2}]^2 = 4\,(1 + u^2 + t^2)$ giebt für $t = o$, $u = \pm$ tg $71^0\ 55'$; für $u = o$, $t =$ tg $33^0\ 35'$. Es ist fig. 9 $\widehat{AK} = \widehat{AL} = 71^0\ 55'$, $AF = AG = 57^0\ 10'$, $AH' = AI' = 84^0\ 2'$, $AH = AI = 33^0\ 35'$.

Ex. 5. Wenn man für den Schnitt eines Kegels mit einer Kugel $R = \gamma = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ und $A = 1$ annimmt, so wird dieser Kegel ein Asymptotenkegel des Hyperboloids in Ex. 4 sein, und die Durchschnittscurve wird in jener Ex. 4 eingeschlossen sein. Es ist $\mathfrak{A} = 2$

$\mathfrak{B} = \frac{3}{4}$, $\mathfrak{C} = 4$ also $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{C}$ und die Gleichung des Schnittes $[2\,(1 + t^2) + \frac{3}{4}\,u^2]^2 = 4\,(1 + u^2 + t^2)$, welche für $t = 0$, $u = \text{tg}\ 53^0\ 8'$ und $u = 0$ liefert. (fig. 10.)

## II. Fall. C ist nicht gleich Null.

### §. 27.

Fx. 1. Für ein Ellipsoid seien die Halbaxen $\beta = 1$, $\gamma = \sqrt{2}$ und die Coordinaten des Mittelpunkts $A = C = 1$ und der Kugelradius $R = 1$, also $\mathfrak{A} = \frac{3}{2}$, $\mathfrak{B} = 1$, $\mathfrak{C} = 4$, $\mathfrak{D} = 1$, $\mathfrak{E} = 4$ und die Gleichung der Curve: $[3\,(1 + t^2) + 2\,u^2]^2 = 4\,(1 + t^2 + u^2)\,(4 + 4\,u + u^2)$ Für $t = 0$ wird $u = 0$ und $7 + 16\,u + 8\,u^2 + 16\,u^3 = 0$, welche die reelle Wurzel $u = -0,4488 = -\text{tg}\ 24^0\ 9'$ hat. Für $u = 0$ wird $t = \text{tg}\ 41^0\ 36'$.

| Für $\psi$ wird $\varphi$ | $\psi$ $\varphi$ | $\psi$ $\varphi$ |
|---|---|---|
| $80^0 - 73^0\ 49'$ | $40^0\ 56^0\ 46'$ | $0^0 - 41^0 36'$ |
| $70^0 - 67^0\ 53'$ | $30^0\ 53^0\ 42'$ | $-10^0 - 34^0 23'$ |
| $60^0 - 63^0\ 35'$ | $20^0\ 50^0\ 6'$ | $-20^0 - 20^0 54'$ |
| $50^0 - 60^0$ | $10^0\ 46^0\ 14'$ | $-24^0\ 9' - 0$ |

fig. 11.

Die Projection der Curve auf xy ist: $y = \pm\sqrt{-[x^2 + 4x - 4 \pm 4\sqrt{1 - x}]}$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{(2-x)\sqrt{(1-x)} - 1}{y\sqrt{1-x}}$

Dieser Quotient wird Null bei $x = 0,517$ und unendlich bei $x = 0$ und $x = 0,93$. Bei $x = 0$ (fig. 12) ist der obere Theil der Curve abgebildet, bei $x = 0,93$ der untere.

Die Projection auf yz ist $y = \frac{1}{4}\sqrt{[-z^4 - 4z^3 - 14z^2 + 12z + 7]}$, und $\frac{dy}{dx} = \frac{-z^3 - 3z^2 - 7z + 3}{8y}$

Die Curve (fig. 13) hat ihr Maximum bei $z = 0,35$ und ihre Grenzen bei $z = 1$ und $z = -0,45$. Die Projection auf xz ist $= -1 + 2\sqrt{(1 - x)}$. (fig. 14.)

§. 28.

Ex. II. In einem einfächrigen Hyperberloid sei $\gamma = \sqrt{2}$, $\beta = 1$, $A = C = 1$ und $R = 1$; also $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}$, $\mathfrak{B} = -1$, $\mathfrak{C} = -4$, $\mathfrak{D} = 1$, $\mathfrak{E} = 4$ und die Gleichung der Curve: $[\frac{1}{2}(1 + t^2) - u^2]^2 = (1 + t^2 + u^2)(4 - 4u + u^2)$ giebt für $t = o$, $u = -$ tg $127^0\ 31'$, für $u = o$, $t =$ tg $75^0\ 31'$. Fig. 15.

Die Projection auf xy ist $y = \frac{1}{3}\sqrt{[-9x^2 + 12x + 4 + 4\sqrt{1 - 3x}]}$, $\frac{dy}{dx} = (-18x + 12)\sqrt{(1 - 3x + 6)} : 18y\sqrt{1 - 3x}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = |2\sqrt{(1 - 3x}\ [-9 + 24x \mp 2] \mp (4 - 9x^2 + 12x) - 8(1 + 9x^2 - 6x) \mp 4(2 - 9x + 9x^2))| : [2(1 - 3x)(4 - 9x^2 + 12x - 4\sqrt{1 - 3x})]$ Aus der Betrachtung dieser Ausdrücke ergiebt sich, dass die Curve die Gestalt (fig. 16) habe, wo $af = -o,61$ und $al = \frac{1}{3}$, $ag = o,942$ Inflexionsqunkte hat sie bei $x = o,160$ und $x = o,26$. In a ist $x = o$. Bei $x = o$ ist der obere Theil der Curve entworfen, und bei $x = -o\ 61$ der untere

Die Projection auf yz ist $y = \frac{1}{4}\sqrt{(-9z^4 + 12z^3 - 14z^2 - 4z + 15)}$. Man findet (fig. 17) $ag = af = o,967$ $ak = ab = 1$, $ap = o,75$. Der grösste Werth liegt bei $z = -o,15$.

Die Projection auf xz ist $z = 1 \pm \frac{2\sqrt{1 - 3x}}{3}$. (fig. 18.)

## II. Durchschnitt der Kugel mit den Rotationsflächen zweiter Ordnung, welche keinen Mittelpunkt haben.

§. 29.

In § 2 ist gesagt worden, dass das elliptische Paraboloid die einzige Rotationsfläche ohne Mittelpunkt sei. Wenn der Anfang der rechtwinkligen Coordinaten wie früher in dem Mittelpunkt der Kugel, die Rotationsaxe der Axe der z parallel ist, und die Coordinaten des Schei-

tels A, C sind, so ist (3) $My^2 + M(x - A)^2 + Q(z - C) = o$ oder $y^2 + (x-A)^2 + k(z-C) = o$ wo $k = \frac{Q}{M}$ der Parameter der Parabel ist, durch deren Umdrehung das Paraboloid erzeugt worden ist.

§. 30.

**Aufgabe.** Den Kegel finden, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel dessen Leitcurve (1, 3) ist.

**Auflösung.** Verbindet man die Gleichungen der erzeugenden Geraden $x = mz$ mit denen der Leitcurve (1, $y = nz$ 3), so findet man $[b^2(1 + m^2 + n^2) - R^2]^2 = R^2(1 + m^2 + n^2)(2mA + k)^2$ wo $b^2 = R^2 + A^2 + CK$.

Berücksichtigt man, dass $\frac{x}{z} = m$, $\frac{y}{z} = n$, so wird die Gleichung des Kegels: $[b^2(1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}) - R^2]^2 = R^2(1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2})(2\frac{x}{z}A + k)^2$.

§. 31.

Wenn man in der eben gefundenen Gleichung für $x = \frac{\sigma}{\sqrt{1+tg^2\psi+tg^2\varphi}}$ $y = \frac{\sigma\, tg\, \varphi}{\sqrt{1+tg^2\psi+tg^2\varphi}}$ $z = \frac{\sigma\, tg\, \psi}{\sqrt{1+tg^2\psi+tg^2\varphi}}$ setzt, und $tg\,\psi = u\, tg\,\varphi = t$, so wird die Gleichung des Kegels zwischen sphärischen Axen-Coordinaten $[(t^2 + u^2 + 1)b^2 - R^2u^2]^2 = R^2(t^2 + u^2 + 1)(2A + ku)^2$ und die der Kugel $\sigma = R$. Die Kegelgleichung ist wie (§ 5) die Durchschnittscurve.

§. 32.

Für $t = o$ wird $u^4[(b^2 - R^2)^2 - k^2R^2] - u^3 4kAR^2 + u^2[2b^2(b^2 - R^2) - 4A^2R^2 - k^2R^2] - 4R^2Aku + b^4 - 4A^2R^2 = o$. Für $u = o$, $t = \frac{1}{b^2}\sqrt{4R^2A^2 - b^2}$.

Es wird wie früher gezeigt, dass die Curve aus einem

Zuge, aus zwei in einem Punkte der Axe der $\psi$ zusammenhängenden oder aus zwei ganz getrennten Theilen besteht. Durch Coordinatenverwandlung wird die Gleichung nicht vereinfacht; denn setzt man $u = \frac{\sin. c + \text{Cos. } u'}{\text{Cos. } c - \sin. u'}$ und $t = \frac{t'}{\text{Cos. } c - \sin. u'}$ so wird erhalten: $[(t'^2 + u'^2 + 1) b^2 - R^2 u'^2]^2 = (t'^2 + u'^2 + 1)(s + f u')$ wo $s = 2A \text{ Cos. } c + k \sin. c$. Damit f verschwinde, muss $f = 2A \sin. c + k \text{ Cos. } c$. $\text{tg } c = -\frac{k}{2A}$ sein, ein Fall, der sehr speciell ist. Für $A = o$ erhält man zwei Kreise. Denn in diesem Falle ist $s = k \sin. c$, $f = k \text{ Cos. } c$ und die umgeformte Gleichung: $t'^2 + u'^2 = ([k^2 - 2Ck(R^2 + Ck) \pm \sqrt{[4k^2(1 - C^2)(R^2 + Ck)^2 + 2Ck(R^2 + Ck) - k^2]}) : 2(R^2 + Ck)^2$, ist ein Kreis, dessen Pol in dem Punkte $c = 90$ ist. Für $k = o$ geht das Paraboloid in die Rotationsaxe über.

## §. 33.

Die Projection auf xy: $y^4 + x^4 + 2x^2y^2 - 4y^2xA - 4x^3A + 4xA^2 + 2y^2(A^2 + kC) + 2x^2(A^2 + Ck) + k^2(x^2 + y^2) - 4Ax(A^2 + kC) - k^2R^2 + (A^2 + kC)^2 = o$ ist eine geschlossene Linie, weil das höchste Glied $(y^2 + x^2)^2 = o$ unmögliche Werthe liefert.

Die Projection auf yz: $-4A^2y^2 = z^4 + 2z^3k + z^2(k^2 - 2b^2 + 4A^2) - 2b^2kz + b^4 - 4A^2R^2$, zeigt, dass y nur zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe habe, und deshalb auch nur zwei reelle Werthe von t existiren, obgleich die Gleichung der Curve in Bezug auf t vom vierten Grade ist.

Die Projection auf xz ist eine Parabel: $z = \frac{k}{2} \pm \sqrt{b^2 + \frac{k^2}{4} - 2xA}$, deren Parameter 2A, deren Scheitel im Punkte $x = \frac{b^2 + \frac{k^2}{4}}{2A}$ und $y = \frac{k}{2}$ ist.

§. 34.

Ex. 1. Es sei $R = 1$, $C = -1$, $A = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{4}$, also $b^2 = 1$ und $b^2 - 2AR = 0$.

Die Gleichung der Curve ist: $(t^2 + 1)^2 = (t^2 + u^2 + 1)(1 + u)^2$ welche für $t = 0$ in $u(u^3 + 17u + 8u^2 + 8) = 0$ übergeht. Die Wurzeln der kubischen Gleichung sind: $u = 0$, $658 = \text{tg } 146^0\ 40'$, $u = -2{,}549 = -\text{tg } 68^0\ 35'$, $u = -4{,}793 = -\text{tg } 78^0\ 13'$. (fig. 19.)

Die Projection auf yz ist $-y^2 = z(z + 0{,}55)(z + 0{,}96)(z - 0{,}96)$. Die Maxima liegen zwischen $z = 0{,}6$ und $z = 0{,}7$, zu denen $y = 0{,}632$ und $y = 0{,}630$ gehört, und in dem untern Theile zwischen $z = -0{,}8$ unn $z = -0{,}9$, zu denen $y = 0{,}549$ und $y = 0{,}540$ gehören. (fig. 20.)

Die Projection auf xy ist: $(x^2 + y^2 - x)^2 + \frac{1}{16}(x^2 + y^2 - 1) = 0$ oder $y^2 = -\frac{(2x^2 - 2x + \frac{1}{16})}{2} \pm \frac{1}{32}\sqrt{65 - 64x}$ (fig. 21.)

| Für x | y | x | y | x | y |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,469 | 0,6 | 0,608 und 0,218 | — 0,2 | 0,066 |
| 0,2 | 0,595 | 0,8 | 0,498 und 0,092 | — 0,4 | unmöglich. |
| 0,4 | 0,636 und 0,112 | 1 | 0 | | |

Die Rectification, Quadratur und Cubatur dieser sphärischen Curven führt auf elliptische Integrale.

## Berichtigungen.

Seite 4 Zeile 5 v. u. statt $\mathfrak{A}m^2 + n^2)$ lies: $\mathfrak{A}(m^2 + n^2)$
„ 8 „ 10 „ „ $\psi$ lies: $\varphi$
„ 8 „ 27 „ „ $2\mathfrak{A}\delta - \mu$ lies: $2\mathfrak{A}\zeta - \mu$
„ 8 „ 27 „ „ $\lambda k$ lies: $\lambda - k$
„ 15 „ 1 „ „ $[\mathfrak{A}(1 + t^2) + \mathfrak{B}u^2]\mathfrak{E}$ lies: $[\mathfrak{A}(1 + t^2) + \mathfrak{B}u^2]^2 = \mathfrak{E}(t + u^2 + t^2)$
„ 24 „ 1 v. u. „ ist = lies: ist z =
„ 6 „ 3 v. o. fehlt: Gleichung (8)
„ 10 „ 16 „ „ — (12)
„ 12 „ 16 „ „ — (14)

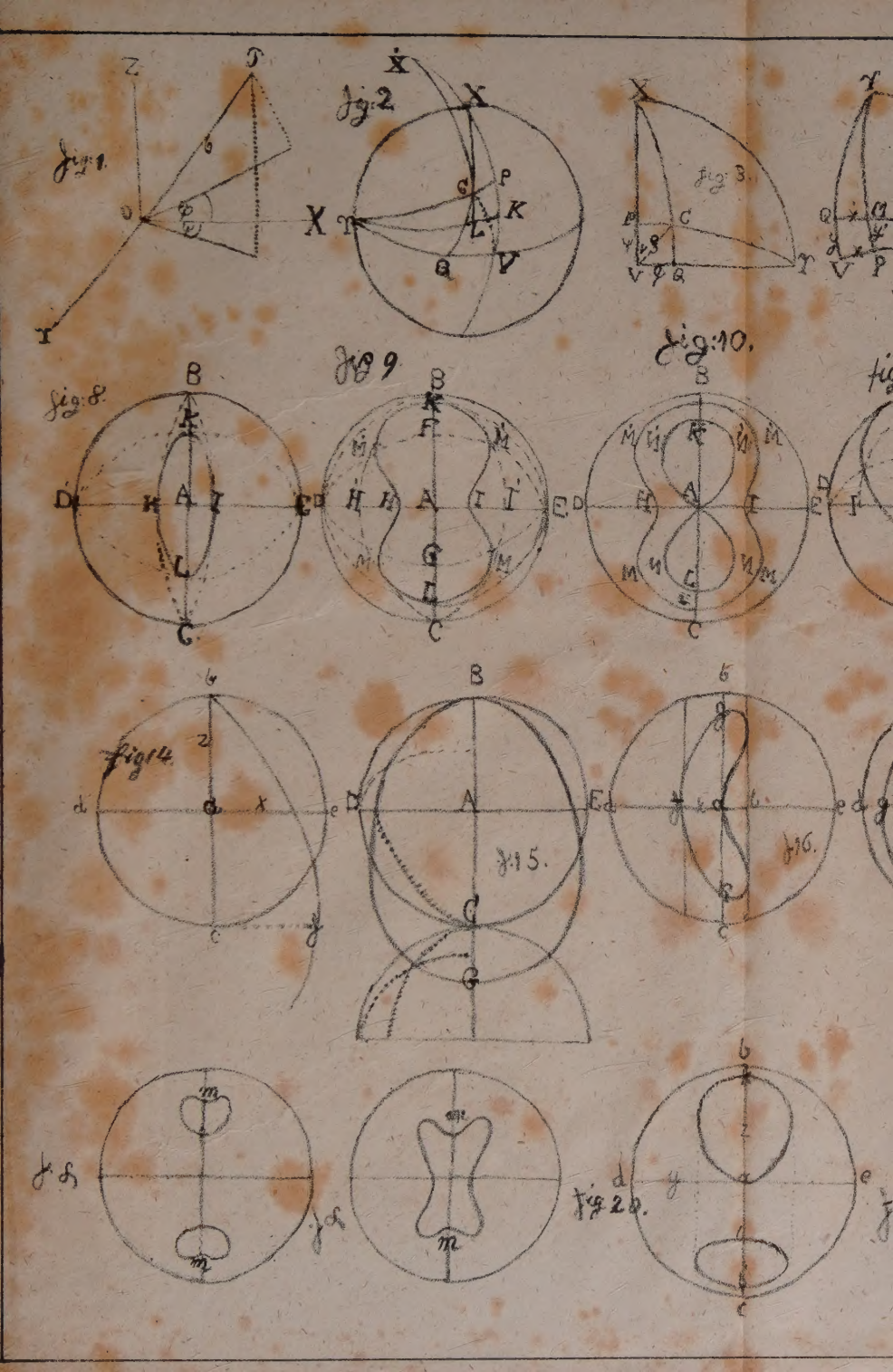
fig:1.
fig:2
fig:3.
fig:8.
fig 9
fig:10.
fig:14.
fig:15.
fig:16.
fig 20.

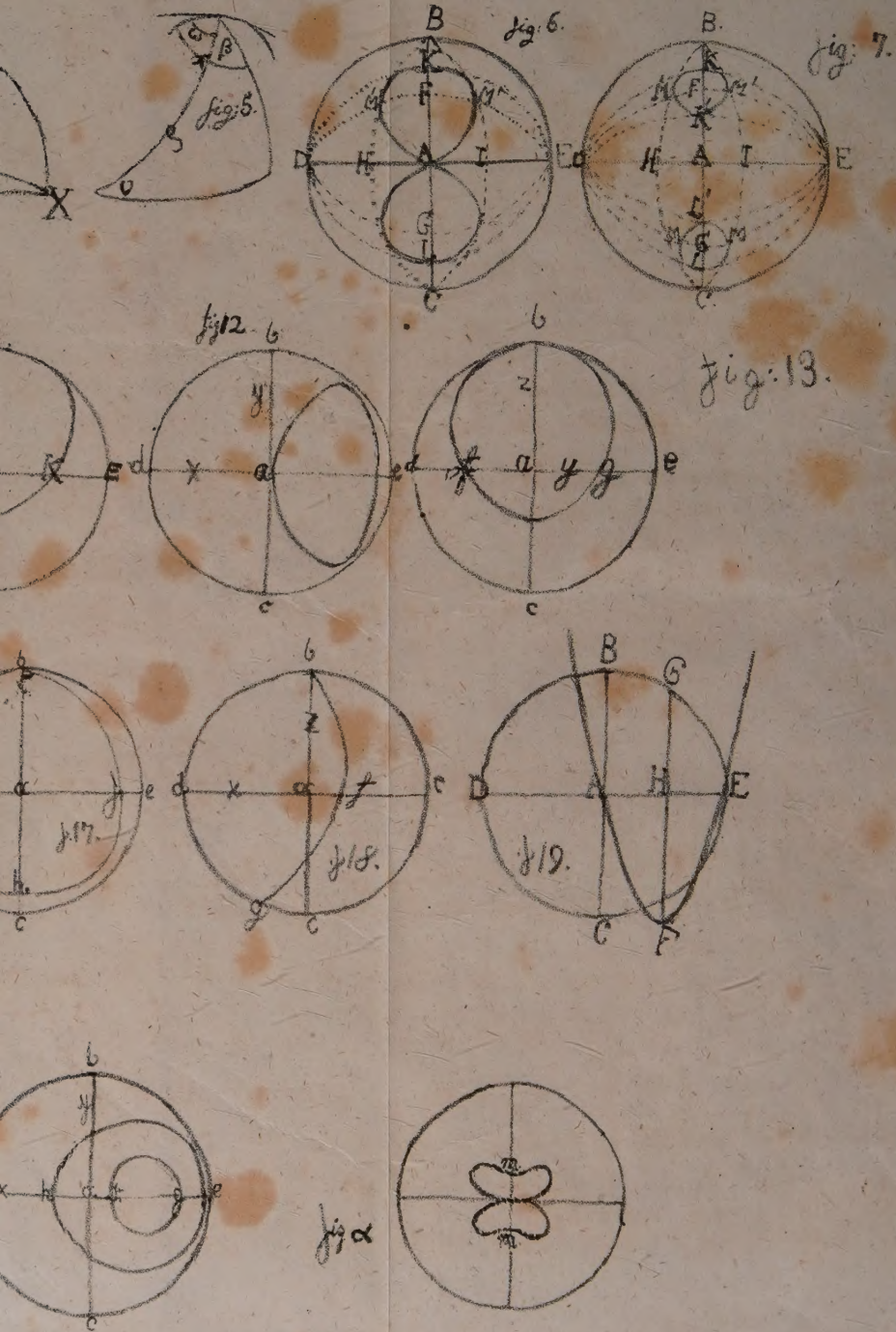
fig: 5.
fig: 6.
fig: 7.
fig 12
fig: 13.
fig 17.
fig 18.
fig 19.
fig α